

Question 8

Part (i)

Playground

$(P \rightarrow Q) \vdash ((P \wedge R) \rightarrow ((P \wedge Q) \wedge R))$

1.	$P \rightarrow Q$	:PR	+
2.	$P \wedge R$	:AS	+
3.	P	: $\wedge$ E 2	+
4.	Q	: $\rightarrow$ E 1 3	+
5.	$P \wedge Q$	: $\wedge$ I 3 4	+
6.	R	: $\wedge$ E 2	+
7.	$(P \wedge Q) \wedge R$	: $\wedge$ I 5 6	+
8.	$(P \wedge R) \rightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$	: $\rightarrow$ I 2-7	+

1.	$(P \rightarrow Q)$	PR
2.	$(P \wedge R)$	AS
3.	P	$\wedge$ E 2
4.	Q	$\rightarrow$ E 1, 3
5.	$(P \wedge Q)$	$\wedge$ I 3, 4
6.	R	$\wedge$ E 2
7.	$((P \wedge Q) \wedge R)$	$\wedge$ I 5, 6
8.	$((P \wedge R) \rightarrow ((P \wedge Q) \wedge R))$	$\rightarrow$ I 2-7

Part (ii)

Playground

$$(P \wedge (Q \vee R)) \vdash ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

1.	$P \wedge (Q \vee R)$	:PR	+
2.	P	: $\wedge E$ 1	+
3.	Q	:AS	+
4.	$P \wedge Q$	: $\wedge I$ 2 3	+
5.	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	: $\vee I$ 4	+
6.	--		
7.	R	:AS	+
8.	$P \wedge R$	: $\wedge I$ 2 7	+
9.	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	: $\vee I$ 8	+
10.	$Q \vee R$	: $\vee E$ 1	+
11.	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	: $\vee E$ 10 3-5 7-9	+

1.	$(P \wedge (Q \vee R))$	PR
2.	P	$\wedge E$ 1
3.	Q	AS
4.	$(P \wedge Q)$	$\wedge I$ 2, 3
5.	$((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$	$\vee I$ 4
7.	R	AS
8.	$(P \wedge R)$	$\wedge I$ 2, 7
9.	$((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$	$\vee I$ 8
10.	$(Q \vee R)$	$\vee E$ 1
11.	$((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$	$\vee E$ 10, 3-5, 7-9

Part (iii)

Playground

$$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$$

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	:PR	+
2. $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$	:PR	+
3. $P(a) \rightarrow Q(a)$	:AE 1	+
4. $Q(a) \rightarrow R(a)$	:AE 2	+
5. $P(a)$	:AS	+
6. $Q(a)$	: $\rightarrow$ E 3 5	+
7. $R(a)$	: $\rightarrow$ E 4 6	+
8. $P(a) \rightarrow R(a)$	: $\rightarrow$ I 5-7	+
9. $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$	:AI 8	+

1.	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	PR
2.	$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$	PR
3.	$P(a) \rightarrow Q(a)$	$\forall$ E 1
4.	$Q(a) \rightarrow R(a)$	$\forall$ E 2
5.	$P(a)$	AS
6.	$Q(a)$	$\rightarrow$ E 3, 5
7.	$R(a)$	$\rightarrow$ E 4, 6
8.	$P(a) \rightarrow R(a)$	$\rightarrow$ I 5-7
9.	$\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$	$\forall$ I 8

Question 9

Part (i)

Playground

$$(A \leftrightarrow \neg B), (B \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)) \vdash (A \wedge \neg B)$$

1. $A \leftrightarrow \neg B$:PR	+
2. $B \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$:PR	+
3. B :AS	+
4. $\neg A \wedge \neg B$: $\leftrightarrow$ E 2 3	+
5. $\neg B$: $\wedge$ E 4	+
6. $\bot$: $\neg$ E 3 5	+
7. $\neg B$: $\neg$ I 3-6	+
8. A : $\leftrightarrow$ E 1 7	+
9. $A \wedge \neg B$: $\wedge$ I 7 8	+

1.	$(A \leftrightarrow \neg B)$	PR
2.	$(B \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B))$	PR
3.	B	AS
4.	$(\neg A \wedge \neg B)$	$\leftrightarrow$ E 2, 3
5.	$\neg B$	$\wedge$ E 4
6.	$\bot$	$\neg$ E 3, 5
7.	$\neg B$	$\neg$ I 3-6
8.	A	$\leftrightarrow$ E 1, 7
9.	$(A \wedge \neg B)$	$\wedge$ I 7, 8

Part (ii)

Playground

$$(F \leftrightarrow \neg E), (E \leftrightarrow (E \leftrightarrow F)) \vdash (\neg E \wedge F)$$

1.	$E \leftrightarrow (E \leftrightarrow F)$	:PR	+
2.	$F \leftrightarrow \neg E$	:PR	+
3.	E	:AS	+
4.	$E \leftrightarrow F$	: $\leftrightarrow$ E 1 3	+
5.	F	: $\leftrightarrow$ E 3 4	+
6.	$\neg E$	: $\leftrightarrow$ E 2 5	+
7.	$\bot$	: $\neg$ E 3 6	+
8.	$\neg E$	: $\neg$ I 3-7	+
9.	F	: $\leftrightarrow$ E 2 8	+
10.	$\neg E \wedge F$	: $\wedge$ I 8 9	+

1.	$(E \leftrightarrow (E \leftrightarrow F))$	PR
2.	$(F \leftrightarrow \neg E)$	PR
3.	E	AS
4.	$(E \leftrightarrow F)$	$\leftrightarrow$ E 1, 3
5.	F	$\leftrightarrow$ E 3, 4
6.	$\neg E$	$\leftrightarrow$ E 2, 5
7.	$\bot$	$\neg$ E 3, 6
8.	$\neg E$	$\neg$ I 3-7
9.	F	$\leftrightarrow$ E 2, 8
10.	$(\neg E \wedge F)$	$\wedge$ I 8, 9

Part (iii)

Playground

(C ↔ (¬D ∨ ¬C)) ⊢ (C ∧ ¬D)

1. C ↔ (¬D | ¬C) :PR

2. C :AS

3. ¬D | ¬C :↔E 1 2

4. ¬C :AS

5. !? :¬E 2 4

6. ¬D :X 5

7. --

8. ¬D :AS

9. ¬D :R 8

10. ¬D :|E 3 4-6 8-9

11. C & ¬D :&I 2 10

12. --

13. ¬C :AS

14. ¬(¬D | ¬C) :BMT 1 13

15. ¬¬D & ¬¬C :DeM 14

16. ¬¬C :&E 15

17. C :¬¬E 16

18. !? :¬E 13 17

19. C & ¬D :X 18

20. C & ¬D :LEM 2-11 13-19

1. (C ↔ (¬D ∨ ¬C))PR

2. CAS

3. (¬D ∨ ¬C)↔E 1, 2

4. ¬CAS

5. ⊥¬E 2, 4

6. ¬D⊥E 5

8. ¬DAS

9. ¬DR 8

10. ¬D∨E 3, 4-6, 8-9

11. (C ∧ ¬D)∧I 2, 10

13. ¬CAS

14. ¬(¬D ∨ ¬C)BMT 1, 13

15. (¬¬D ∧ ¬¬C)DeM 14

16. ¬¬C∧E 15

17. CDNE 16

18. ⊥¬E 13, 17

19. (C ∧ ¬D)⊥E 18

20. (C ∧ ¬D)LEM 2-11, 13-19

An **Open Tower** project. Copyright 2015-2022 G. Leach-Krouse

<gleachkr@ksu.edu> and J. Ehrlich.

This work has been supported by a Munson-Simu Faculty Star award at
Kansas State University.